

# 言語 数学

平 嶋 秀 治

## Language MATHEMATICS

Hideharu HIRASIMA

### 0. はじめに

本論は、大学、特に文科系といわれる大学における授業科目として、数学を言語として取り扱う「言語 数学」を提案し、その主要な内容を述べる。

提案する理由は大きく二つある。第一は、日本語による表現を豊かにするためである。日本の大学では、大部分の科目の授業は日本語で行われている。世上日本語は情緒的表現は豊かであるが、曖昧な表現が多く、科学的事実の表現には適していないなどよく言われるが、それは、使い手の罪であり、正しく使えば、日本語による明確で適切な表現も可能である。本論では、一般的に嫌われている数学の記号・式を積極的に、日本語に取り入れようとする考えである。「数学の記号・式が出て来ると、そこは飛ばして読むことにしている。」とって数学を避ける人が多い。この傾向は我が国だけではないらしい。

Someone told me that each equation I included in the book would halve the sales. I therefore resolved not to have any equations at all. In the end, however, I *did* put in one equation, Einstein's famous equation,  $E=mc^2$ . I hope that this will not scare off half of my potential reader. (Stephen W. Hawking: A Brief History of Time)

実際は、記号・式になった後の方が、明確でわかりやすい文になる筈である。

第二の理由は、大学生の学力の低下を防ぎ、さらに向上させるためである。

最近、大学生の学力が低下し、「正しい日本語が書けない大学生」、「分数の分からない大学生」が増えているという。しかも初等中等教育では「ゆとり教育」ということで、学習指導要領の改訂により、授業時間数特に基礎的教科の時間数が減ってきている。

表1. 小中学校の授業時間数

小学校の総授業時間数						中学校の総授業時間数				
年度	国語	算数	理科	その他	合計	国語	数学	理科	その他	合計
1969	1603	1047	663	2508	5821	525	455	420	2170	3570
1977	1532	1011	558	2684	5785	455	385	315~ 350	1995~ 1960	3150
1989	1601	1011	420	2753	5785	455	385	315~ 350	1995~ 1960	3150
1998	1377	869	350	2771	5367	350	315	295	1980	2940
増減	-226 -14%	-178 -17%	-313 -47%	263 10%	-454 -8%	-175 -33%	-140 -31%	-125 -30%	-190 -9%	-630 -18%

注：年度は学習指導要領改定年度、増減は1998年度と1969年度との差

これを見ても、基礎的教科である国語・算数・数学の授業時間の減少が甚だしいことが分かる。それ故、今後大学生の学力がさらに低下し、「分数の分からない大学生」が増えることは間違いない。大学においてこの授業科目を行い、小中高等学校において理解不十分であり、練習も十分でなかった分を補いたい。

## 1. 数学で用いる記号とその分類

数学（小学校では算数）で用いる記号は、小学校1年生の  $+$   $-$   $=$  から始まり、高等学校の  $\sin$   $\cos$   $\tan$   ${}_nP_r$   ${}_nC_r$  などから微分・積分の記号までいろいろある。ここでは、これらの記号を言語としての分類を述べる。第一の分類法は、形〔式〕による分類で、単独（基本）記号と複合（合成）記号に分類される。例をあげると、

単独（基本）記号 例： $123 + = \times \text{mg s}$ .

複合（合成）記号 例： $123 \leq \pm \text{m}^2 \text{kg km/s}$ .

単独（基本）記号は、言語でいえば個々の字（文字 letter, 例えば、あ い う え お、……または a b c など）で、それらを合成（複合）して作る複合（合成）記号は、語（単語 word）と考えればよい。

第二の分類法は、記号の機能（職能）による分類で、これは言語の文法において単語を品詞などに分類することに相当する。

機能による分類法により、記号を次の三種類に分け、次節以下で説明する。

対象記号(individual symbol)

写像(関数)記号(mapping(function)symbol)

関係(述語)記号(relation (predicate) symbol)

## 2. 対象記号

対象記号とは、数や集合など数学的操作の対象となる個物を表す記号で、文法的には、名詞、代名詞に相当する。

個々の記号と、単独（基本）記号と複合（合成）記号の違い、その他の留意事項について説明する。

### 数の表記法について

我々が日常用いている表記法は、十進位取り法である。これにより表2の10個の単独記号である数字(0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, 算用数字またはイ

ンド・アラビア数字と呼ばれている。)と、必要に応じて小数点(.)と符号+-を用いて、あらゆる数を、複合記号として表記することができる。

表2 単独（基本）対象定記号

記号	名称, 読み方, 説明など
0123456789	数字 零一二三四五六七八九
$\pi$	円周率 パイ
e	自然対数の底 e (イー)
i	虚数単位 i (アイ)
I E	単位行列
$\angle R$	直角
$\infty$	無限大
$\phi$	空集合
N Z Q R C	自然数全体の集合 整数全体の集合 有理数全体の集合 実数全体の集合 複素数全体の集合
m g s	メートル 長さの単位 グラム 質量の単位 秒 時間の単位

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0 + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + \dots + a_{-m} \times 10^{-m},$$

$a_i (n \geq i \geq -m)$  は 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 のどれかひとつ。

$$\text{例 } 365.2422 = 3 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 2 \times 10^{-4}$$

負の数を表すときは、数の前に負の符号 - を付ける。

桁数の大きい数の、日常的表現では3桁ずつにコンマ(,)で区切って表す(例えば、87,654,321)が、数学や科学技術では、3桁ずつの群に分け、群の間には活字の1/4の空間を開けるようにし、コンマなどでは区切らない。(例. 87 654 321.098 76) 数表などでは、5桁ずつの群に分けることもある。

### 命数法（数の読み方）

日本語の数の読み方は、規則的に十進法に従っており、例外は殆どない。これは外国語の数の読み方と比較すれば一目瞭然である。

また大きな数についても、日本語では、十

表3 各国語の命数法

English English	French Français	Spanish Español	German Deutsch	Esperanto Esperanto	Japanese 日本語
1 one	un	uno	eins	unu	一
2 two	deux	dos	zwei	du	二
3 three	trois	tres	drei	tri	三
4 four	quatre	cuatro	vier	kvar	四
5 five	cinq	cinco	fünf	kvin	五
6 six	six	seis	sechs	ses	六
7 seven	sept	siete	sieben	sep	七
8 eight	huit	ocho	acht	ok	八
9 nine	neuf	nueve	neun	naŭ	九
10 ten	dix	diez	zehn	dek	十
11 eleven	onze	once	elf	dek unu	十一
12 twelve	douze	doce	zwölf	dek du	十二
13 thirteen	treize	trece	dreizehn	dek tri	十三
14 fourteen	quatorze	catorce	vierzehn	dek kvar	十四
15 fifteen	quinze	quince	fünfzehn	dek kvin	十五
16 sixteen	seize	dieciseis	sechzehn	dek ses	十六
17 seventeen	dix-sept	diecisiete	siebzehn	dek sep	十七
18 eighteen	dix-huit	dieciocho	achtzehn	dek ok	十八
19 nineteen	dix-neuf	diecinueve	neunzehn	dek naŭ	十九
20 twenty	vingt	viente	zwanzig	du dek	二十
30 thirty	trente	treinta	dreißig	tri dek	三十
40 forty	quarante	cuarenta	vierzig	kvar dek	四十
50 fifty	cinquante	cicuenta	funfzig	kvin dek	五十
60 sixty	soixante	sesenta	sechzig	ses dek	六十
70 seventy	soxante-dix	setenta	siebzig	sep dek	七十
80 eighty	quatre-vingts	ochenta	achzig	ok dek	八十
90 ninety	quatre-vingh-dix	noventa	neunzig	naŭ dek	九十
100 hundred	cent	ciento	hundert	cento	百
1000 thousand	mille	mil	tausend	mil	千
0 zero	zero	cero	null	nulo	零
21 twenty-one	vingt et un	veintiuno veinte uno	einundzwanzig		二十一
22 twenty-two	vingt-deux	veintidós	zweiundzwanzig		二十二
71	soixante et onze				七十一
72	soixante-douze				七十二
81	quatre-vingt-un				八十一
82	quatre-vingt-deux				八十二
91	quatre-vingt-onze				九十一
92	quatre-vingt-douze				九十二

進法にしたがって、十 ( $10$ ) 百 ( $10^2$ ) 千 ( $10^3$ ) 万、萬 ( $10^4$ ) と続き、それ以後は万 ( $10^4$ ) 進法で、億 (おく,  $10^8$ ) 兆 (ちょう,  $10^{12}$ ) 京 (けい,  $10^{16}$ ) 垓 (がい,  $10^{20}$ ) 杼 (じょ,  $10^{24}$ ) 穰 (じょう,  $10^{28}$ ) 溝 (こう,  $10^{32}$ ) 澗 (かん,  $10^{36}$ ) 正 (せい,  $10^{40}$ ) 載 (さい,  $10^{44}$ ) 極 (ごく,  $10^{48}$ ) 恒河沙 (ごうがしゃ,  $10^{52}$ ) 阿僧祇 (あそうぎ,  $10^{56}$ ) 那由他 (なゆた,  $10^{60}$ ) 不可思議 (ふかしぎ,  $10^{64}$ ) 無量大数 (むりょうたいすう,  $10^{68}$ ) という新しい数詞を導入している(『塵劫記』)。実際にはあまり使われないが、極 載 阿僧祇 恒河沙 那由他 などは仏典からの借用であり、お経にはよく出てくる。なお、小数点以下は、十進法に従って分 ( $10^{-1}$ ) 厘 (りん,  $10^{-2}$ ) 毛 (もう,  $10^{-3}$ ) 糸 (し,  $10^{-4}$ ) 忽 (こつ,  $10^{-5}$ ) 微 (び,  $10^{-6}$ ) 纖 (せん,  $10^{-7}$ ) 沙 (しゃ,  $10^{-8}$ ) 塵 (じん,  $10^{-9}$ ) 埃 (あい,  $10^{-10}$ ) 渺 (びょう,  $10^{-11}$ ) 莫 (ばく,  $10^{-12}$ ) 模糊 (もこ,  $10^{-13}$ ) 逡巡 (しゅんじゅん,  $10^{-14}$ ) 須臾 (しゅゆ,  $10^{-15}$ ) 瞬息 (しゅんそく,  $10^{-16}$ ) 彈指 (だんし,  $10^{-17}$ ) 刹那 (せつな,  $10^{-18}$ ) 六德 (りつとく,  $10^{-19}$ ) 虚空 (こくう,  $10^{-20}$ ) 清浄 (せいじょう,  $10^{-21}$ ) となっている。(『塵劫記』)

日常的表現で、3桁ずつにコンマで区切るのは、欧米の命数法に便利であるからである。すなわち、英語で例を挙げると、thousand (千,  $10^3$ ) 以上は千 ( $10^3$ ) 進法で、million (百万,  $10^6$ ) billion (十億,  $10^9$ ) trillion (兆,  $10^{12}$ ) 等と続くが、国によっても異なるし、実際には余り使われていない。

## 二進法について

我々が日常用いているのは、十進法であり、それ以外は殆ど用いていないので、十進法についての理解の程度は浅い。例外的に用いているのは、例えば60秒=1分、60分=1時間という六十進法であろう。十進法の理解を深めるために、十進法以外の進法について説明するのが良い。そのためには、将来の応用を考えて、二進法の説明をするのが最も適切である。

十進法では、10を底とする、すなわち10を一纏り (ひとまとまり) と考えて数を数える方法であるから10に満たない半端の数として数字1 2 3 4 5 6 7 8 9と、半端のないことを表わす数

字0の10種類の数字が必要になり、これだけあれば、上述のように十進位取り法で、あらゆる数を表示することができる。

二進法では、2を底とする、すなわち2を一纏り (ひとまとまり) と考えて数を数える方法である。それで2に満たない半端の数として数字1と半端のないことを表わす数字0の2種類の数字で十分になり、数字0 1だけで二進位取り法を用いれば、あらゆる数を表示することができる。

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} = a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \dots + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0 + a_{-1} \times 2^{-1} + a_{-2} \times 2^{-2} + \dots + a_{-m} \times 2^{-m}, \quad a_i = 0 \text{ or } 1$$

$$(n \geq i \geq -m)$$

$$\begin{aligned} \text{例えば } 10101.11 &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} \\ &= 16 + 0 + 4 + 0 + 1 + 1/2 + 1/4 \\ &= 16 + 4 + 1 + 0.5 + 0.25 = 21.75 \end{aligned}$$

ここで、上のように二進十進変換とともに、十進二進変換の説明も必要であろう。

十進法で表された数を二進法で表すには、2で何回も割って、その余りを一の位から並べればよい。

$$\text{例 } 365_{10} = 101101101_2$$

(下図参照)

2	365	余り	
	182	1	1
	91	0	—2
	45	1	4
	22	1	8
	11	0	—16
	5	1	32
	2	1	64
	1	0	—128
	0	1	256
			365

## 単位 について

表2のmgsは単位であるが、物理量(長さ、質量、時間など)を計るとき基準になる量であり、世界的に使用されている単位系として国際単位系(Système International d'Unités, 略称SI)が1960年に採択され、日本の計量法もこれを基礎としている。SIは7種の基本量に対

し、次のような基本単位を定め、これらとこれらの乗除で表わせる組立単位によって構成され

表 4 S I 国際単位系

基本量	長さ	質量	時間	電流	熱力学温度	物質量	光度
基本単位	メートル	キログラム	秒	アンペア	ケルビン	モル	カンデラ
記号	m	kg	s	A	K	mol	cd

(kg (キログラム) は千 ( $10^3$ ) を表わす k (キロ, 後述) と g (グラム) という二つの単独記号を合成して作った複合記号であるが、SI では質量の基本単位としている.)

MKS 単位系は、3 種の基本単位として、長さのメートル、質量のキログラム、時間の秒を採用した、現在広く用いられている単位系である。  
(以前は cgs 単位系が用いられていた: cm (センチメートル), g (グラム), s (秒) を基礎単位とする). これに電流の A (アンペア) を加えたものが MKSA 単位系である. これらすべての物理量については、高等学校まででは理科(物理, 化学, 生物, 地学など)で説明するのが適当であろうが、長さ、時間などは、数学の分野であり、歴史的に考えると、物理学(特に力学)

と数学 (特に微分積分学, 解析学) は一体として発達してきたものであるので、できるだけ切り離さないで説明をした方が理解し易い. 今までの高等学校の教育では必要以上に切り離して教育をしていたように思われる (大学入試の悪影響の一つ).

さて、基本単位の乗除で作った組立単位、すなわち本論の用語を用いると、単独記号を合成して作った複合記号としては、次のようなものがある.

面積	$m^2$ (平方メートル)	$cm^2$ (平方センチメートル)	$km^2$ (平方キロメートル)
体積	$m^3$ (立方メートル)	$cm^3$ (立方センチメートル)	$mm^3$ (立方ミリメートル)
密度	$kg/m^3$ (キログラム/立方メートル)		
速度・速さ	$m/s$ (メートル/秒)		
加速度	$m/s^2$ (メートル/(秒) <sup>2</sup> )		

10の累乗を表わす接頭辞

kg, cm, mm の k, c, m (mm の前の m) はそれぞれ  $10^3$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  を表わす接頭辞である.  
SI ではこれについて表 5 のように決めている.  
学術的表現の場合は原則的に 3 の倍数を使うということになっているので, c (centi センチ), d (deci デシ), da (deca デカ), h (hecto ヘクト) は使われないが, 日常的には, 次のように, ある特殊な場合に用いられている:  
c (centi センチ): cm (センチメートル)  
d (deci デシ): dl (デシリットル)  
da (deca デカ): dam (デカメートル)  
h (hecto ヘクト): ha (ヘクタール),

hPa (ヘクトパスカル)

最近, 計算機関連で次のような複合記号の単位がよく使われる:

kHz, kb, kB, MHz, Mb, MB, GB; ms,  $\mu$ s, ns, nm, ... etc.

ここで, b: bit (ビット), B: byte (バイト), Hz: Hertz (ヘルツ).

注意: コンピュータでは,  $k=10^3$ ,  $K=2^{10}=1024$  とすることがよくあるが, 正式に採択されているわけではない.

3. 写像記号 (関数記号)

1 個または複数個の対象に新しい対象を対応

表5 10の累乗を表わす接頭辞

記号	名 称	累乗	大きさ	記号	名 称	累乗	大きさ
Y	yotta ヨタ	24	$10^{24}$	d	deci デシ	-1	$10^{-1}$
Z	zetta ゼタ	21	$10^{21}$	c	centi センチ	-2	$10^{-2}$
E	exa エクサ	18	$10^{18}$	m	milli ミリ	-3	$10^{-3}$
P	peta ペタ	15	$10^{15}$	$\mu$	micro マイクロ	-6	$10^{-6}$
T	tera テラ	12	$10^{12}$	n	nano ナノ	-9	$10^{-9}$
G	giga ギガ	9	$10^9$	p	pico ピコ	-12	$10^{-12}$
M	mega メガ	6	$10^6$	f	femto フェムト	-15	$10^{-15}$
k	kilo キロ	3	$10^3$	a	atto アト	-18	$10^{-18}$
h	hecto ヘクト	2	$10^2$	z	zepto ゼプト	-21	$10^{-21}$
da	deca デカ	1	$10^1$	y	yocto ヨクト	-24	$10^{-24}$

させる写像を表わす記号を写像記号という。演算記号・関数記号は写像記号である。

$f$  が集合  $X$  (写像  $f$  の始集合 (または定義域) という) から集合  $Y$  (写像  $f$  の終集合という) への写像であることは

$$f: X \rightarrow Y$$

で表され,  $X$  の要素  $x$  の, 写像  $f$  による像  $y$  (これは終集合  $Y$  の要素である) であることは

$$f: x \mapsto y$$

で表される。また, このことは

$$y = f(x)$$

とも書かれる。

表6 の写像 (関数)  $\exp, \log, \sin, \cos, \tan$  は  $X$  (始集合)  $= R, Y$  (終集合)  $= R$  の写像 (関数) であり,  $dy/dx$  は  $X$  (始集合)  $= C^1, Y$  (終集合)  $= C^0$  の写像 (関数),  $\int$  は  $X$  (始集合)  $= C^0, Y$  (終集合)  $= C^1$  の写像 (関数) である。

上で用いた写像記号  $f$  は変写像記号である。写像の表現が常に  $y = f(x)$  のようになっているればよいが, 上表でみるように変数が  $x$  のように一つの時は  $\log(x)$  とは書かず  $\log x$  のように ( ) 抜きで書くことが多い。  $\sin(at + b)$  の

表6 写像記号1 (関数記号)

記 号	用 例	名称、読み方、説明など
$\exp, e^x$	$\exp x, e^x$	指数関数 エクスポネンシャル $x, e^x$ . exponential of $x$
$\log$	$\log x$	対数関数 ログ $x, \log(\text{arithm})$ of $x$
$\sin$	$\sin x$	正弦関数 サイン $x, \text{sine of } x$
$\cos$	$\cos x$	余弦関数 コサイン $x, \text{cosine of } x$
$\tan$	$\tan x$	正接関数 タンジェント $x, \text{tangent of } x$
$d/dx$	$dy/dx$	導関数 $dy$ バイ $dx, dy$ over [by] $dx$
$\int$	$\int_a^b f(x)dx$	積分インテグラル $a$ から $b$ の $f$ の $x$ の積分, the integral from $a$ to $b$ of $f$ of $x$

表7 写像記号2 (演算記号)

記 号	用 例	名称、読み方、説明など
+	$a + b$	加法 $a$ プラス $b, a$ たす $b, a$ and $b, a$ plus $b$ .
-	$a - b$	減法 $a$ マイナス $b, a$ ひく $b, a$ minus $b$ .
$\cdot, \times$	$a \cdot b, a \times b$	乗法 $a$ かける $b, a$ times $b, a$ multiplied by $b$ .
$\div, /, \text{—}$	$a \div b, a/b$	除法 $a$ わる $b, a$ divided by $b$ .
:	$a : b$	比 $a$ 対 $b, \text{ratio of } a \text{ to } b$ .
!	$n!$	階乗 $n$ の階乗, $n$ factorial, factorial of $n$ .
	$ x $	絶対値, $a$ の絶対値, absolute value of $x$ .
p	$x^p$	$x$ の $p$ 乗, $x$ to the $p$ [pth power].
$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{x}$	$x$ の 平方根, ルート $x, \text{square root of } x$

ような場合は、( ) が不可欠である。表 7 に普通演算記号と呼ばれている写像記号の例をあげる。

表 7 の写像 (演算)  $+$  は  $X$  (始集合)  $= R \times R$ ,  $Y$  (終集合)  $= R$  の写像であるが,  $a+b$  のように二つの変数  $a, b$  の間に書かれるものが多い。写像の像  $f(x)$  や演算の結果, 例えば  $a+b$  などは新たな対象記号である。(名詞句に相当する。)

#### 4. 関係記号 (述語記号)

$a=b$  または,  $a>b$  のように, 対象と対象と

の相等とか大小とかの関係を表わす記号  $= >$  を関係 (述語) 記号という。いわば述語に相当するからである。これを含む記号列を普通, 式といい, 文法的には 節 (clause) あるいは文 (sentence) に相当する。

集合  $X, Y$  をそれぞれ変域とする変数  $x, y$  を含む命題  $R(x, y)$  において,  $x, y$  にそれぞれ  $X, Y$  の元を代入した時, 真か偽が決まる時, 命題  $R(x, y)$  を関係といい, 普通  $x R y$  と書く。ここで用いた  $R$  は, 変関係記号である。主な定関係記号はつぎのとおり。

表 8 関係記号 (述語記号)

記 号	用 例	名称、読み方、説明など
$=$	$a = b$	等号. $a$ は $b$ に等しい. $a$ イコール $b$ . $a$ equals $b$ .
$>$	$a > b$	不等号. $a$ は $b$ より大きい. $a$ 大なり $b$ . $a$ is greater [larger] than $b$ .
$<$	$a < b$	不等号. $a$ は $b$ より小さい. $a$ 小なり $b$ . $a$ is less [smaller] than $b$ .
$\geq$	$a \geq b$	$a$ は $b$ より大きいかまたは等しい. $a$ 大なりまたはイコール $b$ . $a$ is greater than or equal to $b$ .
$\leq$	$a \leq b$	$a$ は $b$ より小さいかまたは等しい. $a$ 小なりまたはイコール $b$ . $a$ is less than or equal to $b$ .
$\neq$	$a \neq b$	$a$ は $b$ に等しくない. $a$ ノットイコール $b$ . $a$ is not equal to $b$ .
$\equiv$	$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$	$\triangle ABC$ は $\triangle DEF$ に合同である. $\triangle ABC$ 合同 $\triangle DEF$ . Triangle ABC is congruent to triangle DEF.
$\sim$	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	$\triangle ABC$ は $\triangle DEF$ に相似である. $\triangle ABC$ 相似 $\triangle DEF$ . Triangle ABC is similar to triangle DEF.
$\parallel$	$g \parallel h$	$g$ は $h$ に平行である. $g$ 平行 $h$ . $g$ is parallel to $h$ .
$\perp$	$g \perp h$	$g$ は $h$ に垂直である. $g$ 垂直 $h$ . $g$ is perpendicular to $h$ .

関係記号 (述語記号) を含む式の取り扱い方についての留意事項は, 6 節以降で改めて述べる。

#### 5. 括弧

( ) { } [ ] を括弧という。区別する時は, それぞれ丸括弧 (parenthesis, pl. -ses), 波括弧 (brace), 角括弧 (bracket) という。(以前は, 小括弧, 中括弧, 大括弧とよんでいた。) 括線 (vinculum, pl. -la) も括弧の一種と考えられる。括弧の中には, ある決まった写像記号の意味を持っているものもあるが, (例えば,  $(a, b)$  は, 順序対, 座標, 開区間, 内積等を表わす。)

ここでは, 写像 (演算) の順序をはっきりさせるための補助記号としての括弧である。この意味の括弧は 1 種類あれば記号としては十分である。普通 ( ) を使う。

特に演算の優先順位を変更するときには, 必要である。  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$  。

括弧に関していえば, 時間があれば, 括弧無し記法である逆ポーランド記法 (reverse Polish notation) や, 計算機のプログラミング言語の翻訳との関係についても言及したい。

#### 6. 集合と論理

この分野については, 高等学校まででは学ん

表9 集合・論理に関する記号

記号	用例	名称、読み方、説明など
$\phi$		空集合
N Z Q R C		自然数全体の集合 整数全体の集合 有理数全体の集合 実数全体の集合 複素数全体の集合
—	$\bar{A}$	補集合 A の補集合. the complement of A.
$\cup$	$A \cup B$	合併集合 A と B の合併集合 A union B. A cup B.
$\cap$	$A \cap B$	共通部分 A と B の共通部分 A intersection B. A cap B.
$\in$ $\ni$	$x \in A$ $A \ni x$	元 $x$ は集合 $A$ に属する. $x$ は $A$ の元 (要素) である. $x$ belongs to $A$ .
$\subset$ $\supset$	$A \subset B$ $B \supset A$	$A$ は $B$ の部分集合. $A$ is a subset of $B$ . $A$ は $B$ に含まれる. $A$ is contained in $B$ . $B$ は $A$ を含む. $B$ contains $A$ .
$\neg$	$\neg P$	否定 $P$ でない. not $P$ .
$\vee$	$P \vee Q$	論理和、離接 (disjunction) $P$ または $Q$ . $P$ or $Q$ .
$\wedge$	$P \wedge Q$	論理積、合接 (conjunction) $P$ および $Q$ . $P$ and $Q$ .
$\Rightarrow$	$P \Rightarrow Q$	含意 $P$ ならば $Q$ . $P$ implies $Q$ . If $P$ then $Q$ .
$\Leftrightarrow$	$P \Leftrightarrow Q$	同値 $P$ は $Q$ と同値 [同等]. $P$ is equivalent to $Q$ . $P$ if and only if $Q$ .
$\forall$	$\forall x P(x)$	全称作用素 すべての $x$ に対して $P(x)$ .
$\exists$	$\exists x Q(x)$	存在作用素 ある $x$ が存在して $Q(x)$ .

でない者も多いと思うが、不可欠である。(高等学校 数学Aで、集合と論理を取り扱っている。(1998年度改定学習指導要領))

表9のなかで、 $A, B$ は集合を表わす(変)記号であり、 $P, Q$ は命題を表わす(変)記号であり、 $P(x), Q(x)$ は対象 $x$ を含む命題を表わす(変)記号である。

集合は、一定範囲にあるもの全体をいい、その範囲内の個々の対象をその集合の元または要素(element)という。集合 $A, B$ において、 $A$ の元はすべて $B$ の元になっているとき、 $A$ は $B$ の部分集合であるといい、表9にあるように $A \subset B$ と書く。

#### 数学用語(学術用語)(technical terms)について

「集合」は日常語の限定化による用語である。ヨーロッパ語では日常語の限定化による学術用語が多い。ちなみに「集合」は、set, ensemble, Menge, 更に中国語では「集(合)」。また「部分集合」は、subset, partie, Teilmenge, 子集(合)である。ここで日常の日本語との感覚的な違いから生ずる誤解について注意したい。日常的に

は、部分は全体の一部であると考えるが、数学では、もとの集合自体も、上で述べた定義によると、その部分集合となる。例えば、 $B = \{1, 2, 3\}$ とする。 $B$ の部分集合を全部書き上げると $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ , だけでなく $\{1, 2, 3\}$ (つまり $B$ 自身)も $\{\}$ (全く元を持たない集合、これを空集合といい、 $\phi$ で表す。表9)も $B$ の部分集合で、全部で8個ある。

また、表9の $N, Z, Q, R, C$ のように、元の個数が有限でなく、無限個の元をもつ集合をも考えに入れるので、「部分は全体よりも小さい」ではなく、「部分は全体より大きくない」になる。

#### 論理に関する注意

ここで取り扱うのは、記号論理(symbolic logic, or mathematical logic)であり、命題は全て、真(true,  $T$ または $1$ で表す)か、偽(false,  $F$ または $0$ で表す。)のいずれか一方のみの値を必ずとる2値論理(two-valued logic)である。表9の論理記号の真理値表(truth table)は次の通りである。



表10.1 真理値表

	否定
P	$\neg P$
1	0
0	1

表10.2 真理値表

		論理和	論理積	含意
P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

注意1.

二重否定は除去できる。 $\neg \neg P = P$ .

日常語の二重否定「ないことはない」と、二重否定を除去した「ある」とは、少なくとも感覚的に違う。

注意2.

論理和  $P \vee Q$  「P または Q」は、表10.2 から、P と Q の両方でもよい。

“Tea or coffee?”と問われたとき、“(Both) tea and coffee (, please).”と答えたら変な顔をされるだろうが、数学・論理では良いことになっている。このような or 「または」を包含的離接(inclusive or)といい、2つのうちの一方のみ、すなわち表10.2で、上から、0110となる離接を排他的離接(exclusive or)という。

注意3.

含意  $P \Rightarrow Q$  が偽であるのは、P が真でQ が偽のときのみである。P が偽のときは、Q が真でも偽でも  $P \Rightarrow Q$  は真であるということは多くの学生にとって理解し難いことである。

注意4.

$P \Rightarrow Q$  が真であるとき、P はQ の十分条件(sufficient condition)、Q はP の必要条件(necessary condition)という。命題  $P \Rightarrow Q$  に対し、 $Q \Rightarrow P$  を逆(converse)、 $\neg P \Rightarrow \neg Q$  を裏(inverse)、 $\neg Q \Rightarrow \neg P$  を対偶(contrapositive)という。 $P \Rightarrow Q$  とその対偶  $Q \Rightarrow \neg P$  は同値である、などの復習は不可欠である。

注意5.

全称と否定. 部分否定と全体否定

英語の辞書(Kenkyusha)で not の項を引くと、

[all, both, every などと共に用いて部分否定を表わす]: All is not gold that glitters. 《諺》  
光るものすべてが金とは限らない／...

という説明がある。また英文法の本には、

(1) Not all of them are happy.

という文は

(2) Some are happy, but others are unhappy.

と paraphrase して説明しているものもある。

ちなみに、全体否定は、nobody, nothing, none などの否定名詞あるいは「no+名詞」を主語とした文にせよとなっている: None that glitters is gold. None of them are happy.

今、例文(1)、全員が3人の場合を考える。○で happy を、×で unhappy を表すことにすると、

下のような(イ)～(ニ)の4種類の場合が考えられる。  
(勿論2値論理で)

(イ) ○○○(全員○)      (ロ) ○○×(2人○1人×)

(ハ) ○××(1人○2人×)      (ニ) ×××(全員×)

上の英文法の指示に従えば、

(イ): All of them are happy.

(否定文(1)の元の肯定文)

(ニ): None of them are happy. (全体否定)

であるが、(1): Not all of them are happy は(イ)～(ニ)のどの場合を指すのであろうか。上のように(1)は(2)と同意義であるとしたら、(1)は(ロ)～(ハ)の2つの場合に対応し、(ニ)の場合は適用されない。例文(1)に相当する日本語は「すべての人が幸福であるとは限らない。」となろうが、これは(ロ)～(ハ)であろうか、(ロ)～(ニ)であろうか。

数学・論理では、(ロ)～(ニ)と考える。もとの集合(全体)は部分集合なので、(ニ)を除外しないのである。

## 7. 記号・式を含む文の書き方・読み方

日本語の文章の中に、記号・式が挿入された時、読み飛ばされてしまったりは、その文章は理解されない。読み飛ばされないように、記号・式の日本語による読み方を決め、記号・式を含めた文が曖昧でなく、理解し易い日本語になっていなければならない。

2 と 3 をあわせると 5 になります

$2 + 3 = 5$

2 たす 3 は 5

これは小学校 1 年さんすうの一番最初に出て来る例である。1 行目の内容を、式では 2 行目のように書き、読み方は 3 行目のようになるという意味であろう。「2 たす 3 は 5」は式「 $2 + 3 = 5$ 」に合わせた読み方であり、正式の日本語「2 と 3 をあわせると 5 になります」または

Two and three are five.  
Zwei und drei ist fünf.  
Deux et trois font cinq.  
Dos y tres son cinco.

Two plus three equals five.  
Zwei plus drei gleich fünf.  
Deux plus trois font égalent cinq.  
Dos más tres son cinco.

となっており、左欄は日常的、右欄はやや改まった読み方で、左欄は直訳すれば「2 と 3 は 5」である。

結論的に、「 $2 + 3 = 5$ 」の読みは「2 たす 3 は 5」にしたい、と考える。理由は、できるだけ正しい日本語になっているか、またはそれに近く、また記号・式の文字の順になっているか、またはそれに近いものを撰ぶという方針に基づく。

現在我々が使っている数学の記号・式の多くが西欧人によって作られたものであるため、式の語順は西欧語の文法に近く、日本語とはかなり違っているので、上記の方針を貫くのは難しいが、工夫と日本語の許容力で良い読み方・書き方を作ることは出来るだろう。例えば、英国人の教師は、式  $\int_a^b f(x)dx$  を黒板に書きながら、“the integral from  $a$  to  $b$  of  $f$  of  $x$  dx”と唱える場合が多い。ドイツ語でも、この式の下に(lies: Integral  $f(x)$   $dx$  von  $a$  bis  $b$ )と書いてあった(Gymnasium 高学年の教科書)。正式の日本語では、「 $x$  の関数  $f$  の、 $x$  についての、 $a$  から  $b$  までの積分」というのであろうが、「インテグラル  $a$  から  $b$  まで  $f x dx$ 」くらいの読み方ができないだろうか。このようなかなり複雑な式・記号が出て来るのは、かなり専門的な数学の授業であり、普通の授業では、このような複雑な式・記号は出てこず、簡単なもののみであるの

「2 に 3 を加えると 5 になる。」とは違う。

加法は、加算、寄せ算、足し算などと呼ばれるが、上の読み方「2 たす 3 は 5」の「足す」は、「(不足を補って) 増し加える」の意味であるから、「3 たす 2 は 5」はよいが、「2 たす 3 は 5」はよくないというひとがいる。

また「2 と 3 は 5」と読む読み方もあるが、これは悪文である、とある国語学者が指摘した。しかし西欧語をみても、

で、あまり不自然な読みは出てこない筈である。読みの例は、記号の表 (表 2, 6, 7, 8, 9) に記述した。なおこれらの表の記号は網羅的でない。詳しくは、参考文献 [2] [3]などを参照せられたい。

#### 極限と連続性の定義について

数列、関数の極限、関数の連続性については、高等学校でも学ぶが、数列  $\{a_n\}$  の極限の定義が「 $n$  が限りなく大きくなるとき、 $a_n$  がある一定の有限の値  $a$  に近づくならば、この  $a$  を数列  $\{a_n\}$  の極限 (値) という。」であり、関数についても同様の定義しか与えられていない。厳密な議論を展開するためには、厳密な定義から出発しなければならない。

#### 数列の極限の定義について

数列の極限の定義文の例をあげる：

- (a) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、それに対応して  $m$  を適当にとれば、すべての  $n > m$  に対して  $|a_n - a| < \varepsilon$  が成り立つとき、 $\{a_n\}$  は収束であるといい、 $a$  を  $\{a_n\}$  の極限值という。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  または  $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$  と書く。
- (b) どんな正の数  $\varepsilon$  に対しても、自然数  $m$  をうまく定めると、 $n > m$  であるどんな  $n$  に対しても、 $|a_n - a| < \varepsilon$  となるとき、 $\{a_n\}$  が  $a$  を極限とする、または  $a$  に収束するといひ、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  または  $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$  と書く。

(c) A sequence  $\{a_n\}$  is said to converge to  $a$ , or be convergent, if for any real number  $\varepsilon > 0$  there is an  $m \in N$  such that  $|a_n - a| < \varepsilon$  whenever  $n > m$ .

(d) Eine Zahl  $a$  heißt **Grenzwert** der Zahlenfolge  $\{a_n\}$  genau dann, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Gliednummer  $m$  gibt, so daß gilt:  $|a_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n > m$ . Statt "Die Folge  $\{a_n\}$  hat den Grenzwert  $a$ " schreibt man kruz

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  (lies: Limes  $a_n$  für  $n$  gegen unendlich gleich  $a$ ) oder  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  (lies:  $a_n$  strebt gegen  $a$  für  $n$  gegen unendlich).

(e) 任意特定の正の数  $\varepsilon$  に対して、適当に正の整数  $m$  をとれば、 $m$  以上の整数  $n$  に就いては必ず  $|a_n - a| < \varepsilon$  となるとき、この数列は  $a$  なる極限に収斂するという。

(f) Pour tout nombre réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un entier  $m$  tel que, pour tout entier  $n$  supérieur à  $m$ ,  $|a_n - a| < \varepsilon$ .  
これらの定義は、表現はやや異なるが、当然ながら同じ事を言っている。それを論理式で書くと、次のようになる。

$$(1) \forall \varepsilon > 0 \exists m \in N \forall n (n > m \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

### 関数の連続性の定義について

関数の連続性の定義文の例をあげる：

(g) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、適当に  $\delta > 0$  をとれば、 $|x - a| < \delta$  なるすべての  $x$  に対して、 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  が成り立つならば、 $f(x)$  は  $x = a$  において連続であるという。

(h) どんな正の数  $\varepsilon$  に対しても、正の数  $\delta$  をうまく定めると、 $|x - a| < \delta$  であるようなどんな  $x$  に対しても、 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  となるようにできるとする。そのとき、 $f(x)$  は  $x = a$  において連続であるという。

(i)  $f$  is said to be continuous at  $x = a$ , if for any  $\varepsilon > 0$  there is a  $\delta > 0$  such that  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  whenever  $|x - a| < \delta$ .

(j) Lorsque  $f$  est une fonction numérique finie définie sur une partie  $P$  de  $\mathbb{R}$ , une condi-

tion nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit continue en un point  $a$  est que, pour tout nombre réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un nombre réel  $\delta$  strictement positif tel que, pour tout élément  $x$  de  $P$ , la relation  $|x - a| < \delta$  implique la relation

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

これらの定義を論理式で書くと、次のようになる。

$$(2) \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

上の定義の例文の問題点を、二つの面から考察する。

第一は、表現の形式に関することである。4 節で述べたように、関係記号の入る記号列(式)は、節または文に相当するので、それが日本語(あるいは他の日常語)に入る場所が、節または文として読んでも正しい文になる所であればよいが、そうならない場所に入ると、意味不明の文になってしまう。

例えば、(a)は、式の読み方は前に示した標準的なものとして、機械的に書き換えると、

『任意の「 $\varepsilon$  は 0 より大きい」に対して、それに対応して  $m$  を適当にとれば、すべての「 $n$  は  $m$  よりおおきい」に対して「 $|a_n - a|$  は  $\varepsilon$  より小さい」が成り立つとき、 $\{a_n\}$  は収束であるという、 $a$  を  $\{a_n\}$  の極限值という。』となり、「 $\varepsilon > 0$ 」と「 $n > m$ 」とは、不適切な式の挿入、

“ $|a_n - a| < \varepsilon$ ”は適切な式の挿入ということになる。この観点で上の例文を見ると、不適切な式の挿入のあるもの：(a), (c), (d), (g), (i), 不適切な式の挿入のないもの：(b), (e), (f), (h), (j) となる。書き手はこのような注意をしなくてはならない。

第二に、 $\forall \varepsilon \exists m$  または  $\forall \varepsilon \exists \delta$  の部分の日本語(あるいは他の日常語)書き換え方法であるが、どのように書き換えているか見てみよう。

(a) 任意の  $\varepsilon (> 0)$  に対して、それに対応して  $m$  を適当にとれば

(b) どんな正の数  $\varepsilon$  に対しても、自然数  $m$  をうまく定めると、

(c) for any real number  $\varepsilon (> 0)$  there is an  $m$

- ( $\in N$ ) such that
- (d) es zu jedem  $\varepsilon (>0)$  eine Gliednummer  $m$  gibt, so daß
- (e) 任意特定の正の数  $\varepsilon$  に対して, 適当に正の整数  $m$  をとれば,
- (f) 任意の  $\varepsilon (>0)$  に対して, 適当に  $\delta (>0)$  をとれば,
- (g) どんな正の数  $\varepsilon$  に対しても, 正の数  $\delta$  をうまく定めると,
- (h) for any  $\varepsilon (>0)$  there is a  $\delta (>0)$  such that
- (i) pour tout nombre réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un nombre réel  $\delta$  strictement positif tel que,

$\forall$  に関しては,

日本語: 任意の, どんな, 任意特定の (末綱恕一教授の言葉)

(ほかに, 全ての, あらゆる, 全部の, 勝手な, などがある.)

英語: any, (ほかに, all, every, each, arbitrary などがある.)

独語: jeder, (ほかに, all などがある.)

仏語: tout, (ほかに, quel que soit などがある.)

$\exists$  に関しては,

日本語: 適当な (適当にとると), うまく (定めると)

(ほかに, 存在する, などがある.)

英語: there is (ほかに, there exists などがある.)

独語: es gibt

仏語: il existe

これらの表現のなかで何が最適であるかは, 学生個人によってかなり違うので, 教師は色々な表現を併記して個人個人に一番理解しやすいのを選んでもらえば良いと考える。

(1), (2)より簡単な場合, 次の(3), (4)を考えてみよう. 今,  $x, y$  は自然数であるとする.

( $x, y \in N$ )

(3)  $\forall x \exists y (x < y)$

これを日本語などに書きなおすと,

(a) 任意の (自然数)  $x$  に対して, それに対応して

(自然数)  $y$  を適当にとれば,  $x < y$  が成り立つ.

(b) どんな (自然数)  $x$  に対しても, (自然数)  $y$  をうまく定めると,  $x < y$  が成り立つ.

(c) For any (natural number)  $x$ , there is a (natural number)  $y$  such that  $x < y$ .

(d) Zu jedem  $x$  gibt es ein  $y$ , so daß gilt:  $x < y$ .

(e) 任意特定の (自然数)  $x$  に対して, 適当に (自然数)  $y$  をとれば,  $x < y$  が成り立つ.

(f) Pour tout (nombre entier naturel)  $x$ , il existe un entier  $y$

となるだろう. また, (3)において,  $\forall x$  と  $\exists y$  との順序を交換した次の式を考える.

(4)  $\exists y \forall x (x < y)$

これを日本語などに書きなおすと,

(a) (自然数)  $y$  を適当にとれば, 任意の (自然数)  $x$  に対して,  $x < y$  が成り立つ.

(b) (自然数)  $y$  をうまく定めると, どんな (自然数)  $x$  に対しても,  $x < y$  が成り立つ.

(c) There is a (natural number)  $y$ , such that  $x < y$  for any (natural number)  $x$ .

(d) Es gibt ein  $y$ , so daß zu jedem  $x$  gilt:  $x < y$ .

(e) 適当に (自然数)  $y$  をとれば, 任意の (自然数)  $x$  に対して,  $x < y$  が成り立つ.

(f) Il existe un entier  $y$ , tel que pour  $x < y$ , tout (nombre entier naturel)  $x$ .

となるだろう. 式(4)は勿論偽の命題である.

(3)の場合, “ $\forall x$ ”は, 自然数全体からあるひとつの数を選びそれを固定して, それ以降の文を考えるのであるから, 全ての, または all などという表現を使うと, 選んだ自然数  $x$  が動くような感じがするのではないか, そこで末綱恕一教授は(e)で, 「任意特定」という表現を選んだのだと考える. (4)の“ $\forall x$ ”は, 全ての, または all などどんな表現でも分かると思う.

なお, “ $\exists y$ ...”の読み方は, 西欧語では, there exists  $y$ , such that...または il existe  $y$ , tel que...などで, 直訳すれば, 「 $y$  が存在して, ...」となるが, 日本語の語順に従うと, 「...となるような,  $y$  が存在する。」となってしまうので,

「yを適当にとれば,...」という形が多いのだと考える。「適当」という語であるが、これは非常に誤解されやすい。辞書（例えば広辞苑）によると、「適当」は

①ある状態・目的・要求などにぴったり合っていること。「適当した人物」「適当な広さ」

②その場に合わせて要領よくやること。いい加減。「適当にあしらう」

となっており、本来の①の意味に解釈してもらいたいのだが、②のように「いい加減」にとられてしまうことが多い。

## 8. おわりに

日本語を深く理解するためには、日本語についてよく学ばなくてはならない。しかし、日本語の中に閉じ籠っていると、その特徴、特性、本質が分かり難い。例えば、外国語や数学を学んで、外から日本語を学ぶことが大変重要であると考ええる。

本論では、内容の骨子のみを記し、数学・数学記号の起源・歴史など、触れなかった部分が多いが、授業を行う場合には、それらをふんだんに加えて行うとよい。最後に参考文献をあげておく。

## 参考文献

- [1] 福原満洲雄 他著 『数学と日本語』(共立出版)
- [2] 福原満洲雄 他著 『続 数学と日本語』(共立出版)
- [3] 小松勇作 編 『数学英和・和英辞典』(共立出版)
- [4] 水谷静夫 著 『言語と数学』(森北出版)
- [5] 木下是雄 著 『理科系の作文技術』(中公新書624)(中央公論社)
- [6] 大矢真一・片野善一郎 著 『数字と数学記号の歴史』(裳華房)
- [7] 野矢茂樹著 『論理学』(東京大学出版会)